

23 (высокий уровень, время – 10 мин)

Тема: Преобразование логических выражений.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике (\wedge , \vee , \neg), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает \wedge и \vee . Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек (\wedge , \vee , \neg), что еще раз подчеркивает проблему.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$ не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B, A \cdot B$ A и B (логическое умножение, конъюнкция)

$A \vee B, A + B$ A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$ импликация (следование)

$A \leftrightarrow B, A \equiv B$ эквиваленция (эквивалентность, равносильность)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция» (см. презентацию «Логика»)

- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ или в других обозначениях $A \rightarrow B = \bar{A} + B$

- операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$A \leftrightarrow B = \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B$ или в других обозначениях $A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», потом – «импликация», и самая последняя – «эквиваленция»
- логическое произведение $A \cdot B \cdot C \dots$ равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0)
- логическая сумма $A + B + C \dots$ равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)
- в приведённых задачах операция импликация считается лево-ассоциативной, то есть операции импликации в цепочке выполняются слева направо (соблюдая принцип «операции с одинаковым приоритетом выполняются слева направо»):

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D = ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D$

- правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\bar{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A; A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
------------	--	--

Задачи для тренировки¹:

- 1) Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание

$$(90 < X \cdot X) \rightarrow (X < (X-1))$$

- 2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 3) Укажите значения переменных K, L, M, N , при которых логическое выражение

$$(\neg K \vee M) \rightarrow (\neg L \vee M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

- 4) Каково наименьшее целое положительное число X , при котором высказывание:

$$(4 > -(4 + X) \cdot X) \rightarrow (30 > X \cdot X)$$

будет ложным.

- 5) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X - 1) < X \rightarrow (40 > X \cdot X)$$

- 6) Укажите значения переменных K, L, M, N , при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow ((\neg K \wedge \neg M) \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1, L=1, M=0, N=1$.

- 7) Каково наименьшее натуральное число X , при котором высказывание

$$\neg(X \cdot X < 9) \rightarrow (X > (X + 2))$$

будет ложным?

- 8) Укажите значения логических переменных P, Q, S, T , при которых логическое выражение

$$(P \vee \neg Q) \vee (Q \rightarrow (S \vee T))$$

¹ Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2016 гг.
2. Тренировочные и диагностические работы МИОО и Статград.
3. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
4. Якушкин П.А., Крылов С.С. ЕГЭ-2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. — М.: Эксмо, 2009.
5. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
6. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
7. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
8. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
9. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
10. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
11. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
12. Евич Л.Н., Лысенко Ф.Ф. (ред.) Информатика и ИКТ. Подготовка к ЕГЭ-2013. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012.
13. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2015. Информатика. Тематические тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.
14. Ушаков Д.М. ЕГЭ-2015. Информатика. 20 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. — М.: Астрель, 2014.

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных P, Q, S, T (в указанном порядке).

- 9) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором высказывание:

$$((X + 6) \cdot X + 9 > 0) \rightarrow (X \cdot X > 20)$$

будет ложным?

- 10) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента B – числа 154, столбец значений аргумента C – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

- 11) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента B – числа 30, столбец значений аргумента C – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

- 12) Известно, что для чисел X , Y и Z истинно высказывание

$$(Z < X \vee Z < Y) \wedge \neg(Z+1 < X) \wedge \neg(Z+1 < Y)$$

Чему равно Z , если $X=25$ и $Y=48$?

- 13) Укажите значения переменных K , L , M , N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K , L , M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1$, $L=1$, $M=0$, $N=1$.

- 14) Укажите значения переменных K , L , M , N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \wedge (K \rightarrow \neg M) \wedge (\neg K \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge N))$$

истинно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K , L , M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что $K=1$, $L=1$, $M=0$, $N=1$.

- 15) A , B и C – целые числа, для которых истинно высказывание:

$$(C < A \vee C < B) \wedge \neg(C+1 < A) \wedge \neg(C+1 < B)$$

Чему равно C , если $A=45$ и $B=18$?

- 16) Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$$

где J , K , L , M , N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J , K , L , M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 17) A , B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((B < A) \rightarrow (2C > A)) \wedge ((A < B) \rightarrow (A > 2C))$$

Чему равно A , если $C = 8$ и $B = 18$?

- 18) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L) \vee (M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 19) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 100) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 100)$$

- 20) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(8 \cdot X - 6 < 75) \rightarrow (X \cdot (X-1) > 65)$$

- 21) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 55) \rightarrow (X \cdot X > 50)$$

- 22) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot (X+1) \leq X \cdot X + 7)$$

- 23) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L \vee M) \wedge (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 24) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \rightarrow (\neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 25) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L) \wedge (M \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 26) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((A \rightarrow B) \wedge C) \vee (D \wedge \neg D) = 1,$$

где A, B, C, D – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений A, B, C, D , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

- 27) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 85) \rightarrow (X \cdot X > 90)$$

- 28) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+2) > X \cdot X + 30) \rightarrow (X \cdot (X+2) \leq X \cdot X + 30)$$

- 29) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 7 > 15) \rightarrow (X \cdot X + 8 < 35)$$

- 30) Каково наибольшее целое положительное число X , при котором ложно высказывание:

$$(9 \cdot X + 5 > 60) \rightarrow (X \cdot X > 80)$$

- 31) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg M \wedge K \wedge \neg N \wedge \neg J \wedge (L \vee \neg L) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 32) Каково наибольшее целое число X , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 30) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 30)$$

- 33) Укажите значения переменных K, L, M, N , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow \neg M) \vee (\neg L \wedge M \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

34) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(\neg K \vee \neg L \vee \neg M) \wedge (L \vee \neg M \vee \neg N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

35) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow (\neg M \vee \neg N)) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee K \vee L) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

36) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \vee K \vee L) \rightarrow \neg(M \rightarrow N)) \wedge ((\neg J \wedge \neg K \wedge \neg L) \rightarrow (\neg M \vee N)) \wedge (M \vee \neg N \vee K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

37) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (L \wedge M \wedge N)) \vee \neg((L \wedge M \wedge N) \rightarrow (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge J) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

38) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(M \wedge \neg(L \vee K)) \rightarrow (\neg(K \wedge M) \wedge N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

39) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((K \wedge \neg L \wedge \neg N) \rightarrow (\neg L \rightarrow M)) \vee ((\neg K \vee L \vee N) \rightarrow (\neg L \wedge \neg M))) \wedge (K \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

40) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((\neg K \rightarrow M) \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge \neg N)) \vee ((\neg K \wedge \neg M) \rightarrow (\neg M \vee L \vee N))) \wedge (L \wedge M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

41) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (C = B)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C = A))$$

Чему равно B, если A = 45 и C = 18?.

42) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge P) = 1$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

43) Каково наименьшее целое положительное число X, при котором ложно высказывание:

$$(82 < X \cdot X) \rightarrow (81 > (X-1) \cdot (X-1))$$

44) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \wedge Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee P) = 0$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

45) Каково наименьшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) < 50) \rightarrow (X \cdot X > 35)$$

46) Каково наибольшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 99) \rightarrow (X \cdot X < 65)$$

47) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$(|X| \geq 5) \vee (|X| < 1)$$

48) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$\neg((|X| < 5) \wedge (|X| < 1) \wedge (|X| < 10))$$

49) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$((X-4) \cdot (X-6) \geq 0) \rightarrow (X \cdot X - 12 \cdot X + 35 > 0)$$

50) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \rightarrow K \wedge \neg(L \rightarrow M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

51) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(J \rightarrow L) \wedge (K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \wedge (L \rightarrow M) \wedge (M \rightarrow K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.